Алгоритмы.
Позиционная система счисления.

Позиционная система счисления

Позиционная система счисления — система счисления, в которой значение каждого числового знака (цифры) в записи числа зависит от его позиции (разряда).

Позиционная система счисления определяется целым числом $n > 1$, называемым основанием системы счисления. Система счисления с основанием n также называется n-ичной.

n = 10 — десятичная

n = 2 — двоичная

n = 16 - шестнадцатеричная

Способ записи числа в позиционной системе счисления

Целое число без знака (обозначим например как x) в n-ичной системе счисления записывается как линейная комбинация степеней числа n.

$$x = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot n^i$$

a_i Цифры (используемые в данной системе счисления) удовлетворяющие условию $0 \leqslant a_i < n$

n^i Основание системы счисления в степени i

i Позиция цифры при записи

k Количество разрядов в записи числа

Десятичная система счисления

Основанием десятичной системы счисления является число 10 (предположительно связанно с количеством пальцев на руках). Цифрами являются [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

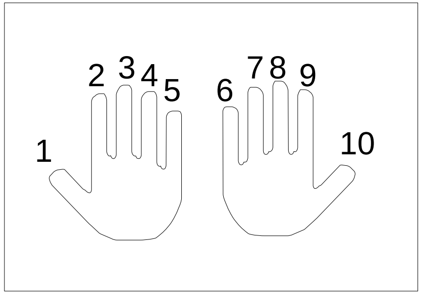
Цифры

Основание

Запись числа → 4275 $= 5 \circ 10^0 + 7 \circ 10^1 + 2 \circ 10^2 + 4 \circ 10^3$

3 2 1 0

Позиции



$$x = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot 10^i$$

Сложение чисел в позиционных системах счисления

1) Выровнять их по позициям (для меньшего числа заполнить недостающие позиции нулями).
2) Установить начальное значение позиции (в дальнейшем s) равной нулю.
3) Выполнить сложение цифр первого и второго числа на позиции s. В случае если сумма цифр равна или больше основания, то заменяем сумму на остаток от деления суммы на основание, и переносим единицу в сумму следующего разряда. Записываем результат на s позицию суммы.
4) Если s = количеству разрядов и нет единицы с переноса. **Алгоритм окончен**. В противном случае увеличить s на единицу. Перейти к **3**.

Пример сложения в десятичной системе счисления

$5438 + 27 \rightarrow \begin{array}{r} 5438 \\ +\ \underbrace{00}_{}27 \\ \hline \end{array}$

Дополняем нулями

$\rightarrow \begin{array}{r} \scriptstyle +1 \\ 543\boxed{8} \\ +\ 002\boxed{7} \\ \hline 5 \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 8+7=15 \geqslant 10 \\ 15 \% 10 = 5 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{r} 54\boxed{3}8 \\ +\ 00\boxed{2}7 \\ \hline 5 \end{array} \rightarrow \{1+3+2=6\}$

$\rightarrow \begin{array}{r} 5\boxed{4}38 \\ +\ 0\boxed{0}27 \\ \hline 65 \end{array} \rightarrow \{4+0=4\} \rightarrow \begin{array}{r} \boxed{5}438 \\ +\ \boxed{0}027 \\ \hline 465 \end{array} \rightarrow \{5+0=5\} \rightarrow \begin{array}{r} 5438 \\ +\ 0027 \\ \hline 5465 \end{array} \rightarrow 5465$

Умножение чисел в позиционных системах счисления

1) Для умножения чисел нужно выровнять их по позициям (для меньшего числа заполнить недостающие позиции нулями).
2) Выбрать в качестве начальной позиции (в дальнейшем s) нуль.
3) Выполнить умножение цифры на s - позиции второго числа на цифры во всех позициях первого числа. В случае если произведение цифр равно или больше основания, то заменяем произведение на остаток от деления произведения на основание, и переносим неполное частное в следующий разряд. Полученное в результате число записываем начиная с позиции s.
4) Если s=количеству разрядов и нет значения на перенос. Сложить полученные числа. **Алгоритм закончен**. В противном случае увеличить s на единицу и перейти к пункту **3**.

Пример умножения в десятичной системе счисления

5438 * 27

```
  5438
* 0027
 38066
```

```
  5438
* 0027
 38066
10876
```

```
   5438
 * 0027
  38066
 10876
0000
```

```
    5438
  * 0027
   38066
  10876
 0000
0000
```

```
    5438
  * 0027
   38066
  10876
 0000
0000
00146826
```

Запись числа в позиционной системе счисления

Запись числа в позиционной системе счисления с произвольным основанием n можно выполнить по следующему алгоритму.

1) Выполнить целочисленное деление на основание системы счисления. Вычислить остаток. Установить позицию равную нулю.
2) Если неполное частное равно 0. Записать остаток на текущую позицию. **Закончить алгоритм**.
3) В качестве числа использовать неполное частное. Увеличить позицию на единицу. Перейти к пункту **2**.

Пример записи числа в десятичной системе счисления

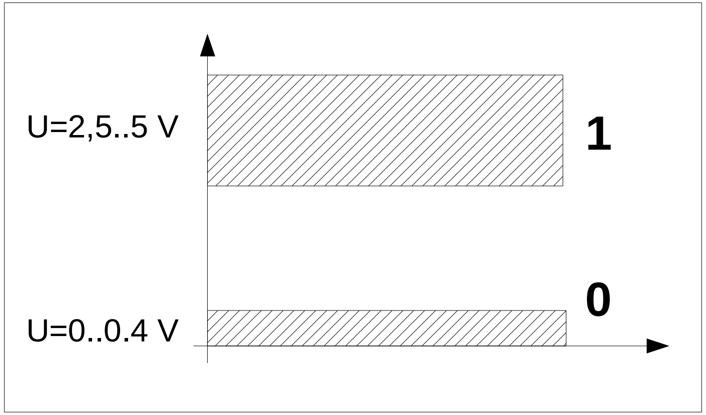
$$5438 \rightarrow \left\{\begin{matrix} 5438 = 543 \cdot 10 + 8 \\ r = 543, q = 8 \\ i = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 543 = 54 \cdot 10 + 3 \\ r = 54, q = 3 \\ i = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 54 = 5 \cdot 10 + 4 \\ r = 5, q = 4 \\ i = 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 5 = 0 \cdot 10 + 5 \\ r = 0, q = 5 \\ i = 3 \end{matrix}\right\}$$

8	38	438	5438
0	1 0	2 1 0	3 2 1 0

Двоичная система счисления

Двоичная система счисления — позиционная система счисления с основанием 2. Благодаря непосредственной реализации в цифровых электронных схемах на логических вентилях, двоичная система используется практически во всех современных компьютерах и прочих вычислительных электронных устройствах. Цифрами являются [0, 1]

$$x = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot 2^i$$



Получение значения числа в двоичной системе счисления

$10010111 = 1*2^0 + 1*2^1 + 1*2^2 + 0*2^3 + 1*2^4 + 0*2^5 + 0*2^6 + 1*2^7 = 1+2+4+0+16+0+0+128=151$

7 6 5 4 3 2 1 0

Пример сложения в двоичной системе счисления

$$1001+111 \rightarrow \begin{array}{r} 1001 \\ +\;0111 \\ \hline \end{array}$$

Дополняем нулями

$$\rightarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle +1} \\ 1001 \\ +\;0111 \\ \hline 0 \end{array} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} 1+1=2\geqslant 2 \\ 2\%2=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle +1} \\ 1001 \\ +\;0111 \\ \hline 00 \end{array} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} 1+0+1=2\geqslant 2 \\ 2\%2=0 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle +1} \\ 1001 \\ +\;0111 \\ \hline 000 \end{array} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} 1+0+1=2\geqslant 2 \\ 2\%2=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle +1} \\ 1001 \\ +\;0111 \\ \hline 0000 \end{array} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} 1+0+1=2\geqslant 2 \\ 2\%2=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} 1001 \\ +\;0111 \\ \hline 10000 \end{array}$$

Значения в десятичной системе счисления
1001 = 9
111 = 7
10000 = 16

Пример умножения в двоичной системе счисления

1001 * 111 →

```
    1001
*   0111
--------
    1001
```

→

```
    1001
*   0111
--------
    1001
   1001
```

→

```
    1001
*   0111
--------
    1001
   1001
  1001
```

→

```
    1001
*   0111
--------
    1001
   1001
  1001
 0000
```

→

```
    1001
*   0111
--------
    1001
   1001
  1001
 0000
--------
00111111
```

Значения в десятичной системе счисления
1001 = 9
111 = 7
111111 = 63

Пример записи числа в двоичной системе счисления

$$25 \rightarrow \left\{\begin{matrix} 25=12\cdot 2+1 \\ r=12, q=1 \\ i=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 12=6\cdot 2+0 \\ r=6, q=0 \\ i=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 6=3\cdot 2+0 \\ r=3, q=0 \\ i=2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 3=1\cdot 2+1 \\ r=1, q=1 \\ i=3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} 1=0\cdot 2+1 \\ r=0, q=1 \\ i=4 \end{matrix}\right\}$$

1	01	001	1001	11001
0	1 0	2 1 0	3 2 1 0	4 3 2 1 0

Шестнадцатеричная система счисления

Шестнадцатеричная система счисления — позиционная система счисления по целочисленному основанию 16. Цифры данной системы счисления [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F].

Буквы обозначают следующие числовые значения A = 10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15.

$$x=\sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot 16^i$$

Таблица умножения в этой системе счисления

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Получение значения числа в шестнадцатеричной системе счисления

$7C3 = 3*16^0 + C*16^1 + 7*16^2 = 3 + 12*16 + 7*256 = 1987$

2 1 0

Пример сложения в шестнадцатеричной системе счисления

7C3+A1 → $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 7C3 \\ \underbrace{0}A1 \end{array} \\ \hline \end{array}$ → $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 7C\boxed{3} \\ 0A\boxed{1} \end{array} \\ \hline 4 \end{array}$ → $\{3+1=4\}$ → $\begin{array}{r} \overset{+1}{} \\ + \begin{array}{r} 7\boxed{C}3 \\ 0\boxed{A}1 \end{array} \\ \hline 64 \end{array}$ → $\left\{\begin{array}{c} C+A=22\geqslant 16 \\ 22\%16=6 \end{array}\right\}$

Дополняем нулями

→ $\begin{array}{r} + \begin{array}{r} \boxed{7}C3 \\ \boxed{0}A1 \end{array} \\ \hline 864 \end{array}$ → $\{1+7+0=8\}$ → 864

Значения в десятичной системе счисления
7C3 = 1987
A1 = 161
864 = 2148

Пример умножения в шестнадцатеричной системе счисления

7A * 1B →

```
  7A
* 1B
-----
 53E
```

→

```
  7A
* 1B
-----
 53E
7A
```

→

```
  7A
* 1B
-----
 53E
7A
-----
 CDE
```

Значения в десятичной системе счисления
7A = 122
1B = 27
CDE = 3294

Пример записи числа в шестнадцатеричной системе счисления

$$125 \rightarrow \begin{Bmatrix} 125 = 7 \cdot 16 + 13 \\ r = 7, q = D \\ i = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 7 = 0 \cdot 16 + 7 \\ r = 0, q = 7 \\ i = 1 \end{Bmatrix}$$

D
0

7D
1 0

Список литературы

1) Р. Курант, Г. Роббинс: Что такое математика? — 3-е изд., испр. и доп. — М.: ЦНМО, 2001. — 568 с.